MPSI 2024/2025 | Correction DS n°7 (2h)

I - Chaîne d'oscillateurs et onde mécanique

I.1 - Oscillateur harmonique

1) La position d'équilibre correspond à un minimum de l'énergie potentielle et vérifie donc l'équation :

$$V'(x_{eq}) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 \times a\, e^{-a(x_{eq}-x_0)} \times \left[1 - e^{-a(x_{eq}-x_0)}\right]^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{eq} = x_0}$$

Il s'agit nécessairement d'un minimum car $V(x) \geq 0$ et $V(x_{eq}) = 0$.

2) Avec le changement de variable proposé :

$$V(x) = V_0\left[1 - e^{-a\varepsilon}\right]^2 \simeq V_0 a^2 \varepsilon^2 = \frac{1}{2}k\varepsilon^2 \quad \text{avec :} \quad \boxed{k = 2a^2 V_0}$$

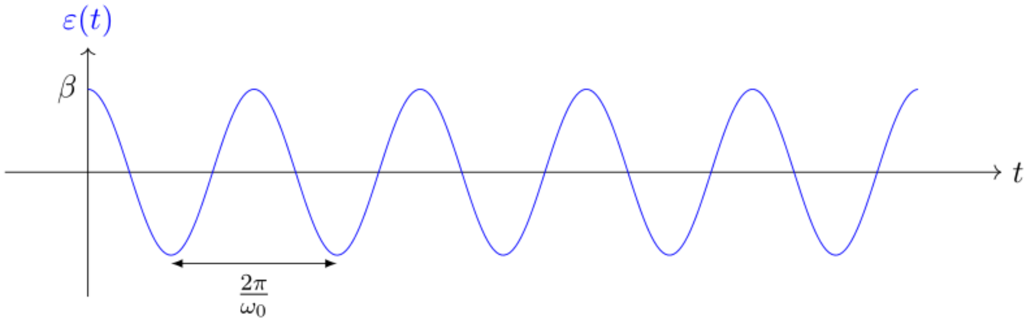
On obtient bien une énergie potentielle de la même forme que celle associée à un ressort de raideur k.

3) Le théorème de la puissance mécanique, appliqué à la particule de masse m dans un référentiel galiléen, donne l'équation différentielle :

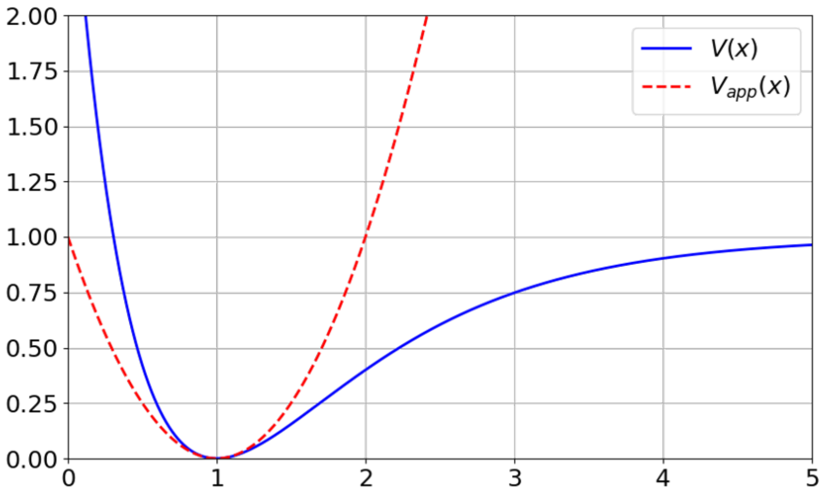
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mx^2 + V(x)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

La résolution de cette équation donne :

$$\varepsilon(x) = \beta\, \text{cos}(\omega_0 t)$$



4) Dans le graphique suivant, $V(x)$ et $V_{app}(x)$ désignent respectivement le potentiel de Morse et son expression approchée.



I.2 - Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

5) À l'équilibre, les atomes sont séparés d'une distance a et le choix de l'origine impose $x_0(0) = 0$ donc $\boxed{x_n(0) = na}$.

On en déduit $\boxed{u_n(t) = x_n(t) - na}$.

6) La masse d'indice n subit deux forces de rappel de la part :

○ du ressort situé à sa gauche et de longueur : $\ell_g(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t)$;
○ du ressort situé à sa droite et de longueur : $\ell_d(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$;

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la masse d'indice n dans un référentiel galiléen, donne :

$$m\ddot{x}_n = -k\left(\ell_g(t) - a\right) + k\left(\ell_d(t) - a\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{u}_n = \omega_0^2\Big[u_{n+1} + u_{n-1} - \alpha u_n\Big]}$$

Donc $\boxed{\beta = 2}$.

7) Il s'agit bien d'une onde harmonique puisqu'elle évolue temporellement de façon sinusoïdale. U_0 représente l'amplitude de l'onde et ω sa pulsation.

8) « On définit la longueur d'onde comme la plus petite distance séparant deux telles masses au repos. ». Donc :

$$\lambda = x_p(0) - x_n(0) = (p-n)\,a$$

De plus, la fonction exp est 2π-périodique (avec $p > n$) donc :

$$\underline{u_p}(t) = \underline{u_n}(t) \quad \Rightarrow \quad \omega t - qna = \omega t - qpa + 2\pi \quad \Rightarrow \quad p - n = \frac{2\pi}{qa} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{q}}$$

donc q représente donc le vecteur d'onde (noté k dans le cours sur les ondes).

I.3 - Solide cristallin

9) Le terme $\dfrac{A}{x^{12}}$ correspond aux interactions attractives de Van der Waals prépondérantes à grande distance. Le terme $-\dfrac{B}{x^6}$ correspond à des interactions répulsives entre les nuages électroniques des particules prépondérantes à courte distance.

10) Une étude de fonction montre immédiatement que $V(x)$ vaut $+\infty$ en $x = 0$, puis est strictement décroissante, passe par un minimum puis est strictement croissante et atteint 0^- en $x = +\infty$. La profondeur du puits est donc la valeur du minimum de la fonction (en valeur absolue).

$$V'(x=a) = 0 = -\frac{12A}{a^{13}} + \frac{6B}{a^7} \quad \Rightarrow \quad a = \left(\frac{2A}{B}\right)^{1/6}$$

La profondeur du puits vaut donc :

$$V_0 = -V(x=a) = -\frac{A}{\left(\dfrac{2A}{B}\right)^2} + \frac{B}{\left(\dfrac{2A}{B}\right)} = \frac{B^2}{4A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_0 = \frac{B}{2a^6}}$$

11) Courbe 1 : $\dfrac{V(x)}{V_0}$ d'après ce qui précède ; courbe 2 : $\left(\dfrac{a}{x}\right)^{12}$ qui doit décroître plus rapidement que la courbe 3 : $2\left(\dfrac{a}{x}\right)^6$.

12) On sait que tout potentiel approximer à l'ordre 2 se comporte comme un potentiel harmonique de constante de raideur :

$$\boxed{k = V''(x=a) = \frac{V_0}{a^2}\Big(12 \times 13 - 2 \times 6 \times 7\Big) = \frac{72V_0}{a^2}}$$

---------------------------------- Fin de la partie I ----------------------------------

II - Un jeu d'enfant

13) On utilise la conservation de l'énergie mécanique entre B et C.

$$\frac{1}{2}k\left(2R - R\right)^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_c = \sqrt{\frac{kR^2}{m}}}$$

14) Vitesse : $\overrightarrow{v} = R\omega\,\overrightarrow{e}_\theta$.

Énergie potentielle de pesanteur : $\mathcal{E}_p = -mgx = -mgR\cos(\theta)$.
On utilise la conservation de l'énergie mécanique entre C et M quelconque.

$$\frac{1}{2}mv_c^2 - mgR = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 - mgR\cos(\theta)$$

Ainsi,

$$\boxed{mR\omega^2 = kR + 2mg\left(\cos(\theta) - 1\right)}$$

15) On a :
- Poids : $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{e_x} = mg\left(\cos(\theta)\,\overrightarrow{e_r} - \sin(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta}\right)$
- Réaction normale du support : $\overrightarrow{N} = -N\overrightarrow{e_r}$
- Accélération : $\overrightarrow{a} = R\dot{\omega}\overrightarrow{e_\theta} - R\omega^2\overrightarrow{e_r}$

On applique le PFD que l'on projette sur $\overrightarrow{e_r}$.

$$-mR\omega^2 = -N + mg\cos(\theta)$$

Avec la question précédente, on en déduit :

$$\boxed{N = kR + mg\left(3\cos(\theta) - 2\right)}$$

16) Au point D, la réaction normale du support s'annule.

$$0 = kR + mg\left(3\cos(\theta_D) - 2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\theta_D) = \frac{2}{3} - \frac{kR}{3mg}}$$

Pour que la point D coïncide avec le point E, il faut que $\theta_D = \pi$.

$$-1 = \frac{2}{3} - \frac{k_0R}{3mg} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_0 = \frac{5mg}{R}}$$

Pour atteindre le point E, il faut donc que $\boxed{k > k_0}$.
17) La vitesse au point E vaut, dans ce cas limite :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}mv_{C,0}^2 - mgR = \frac{1}{2}mv_{E,0}^2 + mgR \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{2}k_0R^2 - mgR = \frac{1}{2}mv_{E,0}^2 + mgR \\
\Rightarrow\ & \frac{5mgR}{2} - mgR = \frac{1}{2}mv_{E,0}^2 + mgR \\
\Rightarrow\ & \boxed{v_{E,0} = \sqrt{gR}}
\end{aligned}$$

La bille n'est soumise qu'à sont poids durant la chute libre. On pose $t = 0$ le temps où $M = E$. Les conditions initiales de la chute sont :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= R\overrightarrow{e_r} = -R\overrightarrow{e_x} \\
\overrightarrow{v} &= \sqrt{gR}\,\overrightarrow{e_\theta} = -\sqrt{gR}\,\overrightarrow{e_y}
\end{aligned}$$

Le PFD donne :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{x} &=& g \\ \ddot{y} &=& 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} &=& gt \\ \dot{y} &=& -\sqrt{gR} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \dfrac{gt^2}{2} - R \\ y &=& -\sqrt{gR}\,t \end{array}\right.}$$

18) Lorsque $x = 0$:

$$t = \sqrt{\frac{2R}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -R\sqrt{2} < -R}$$

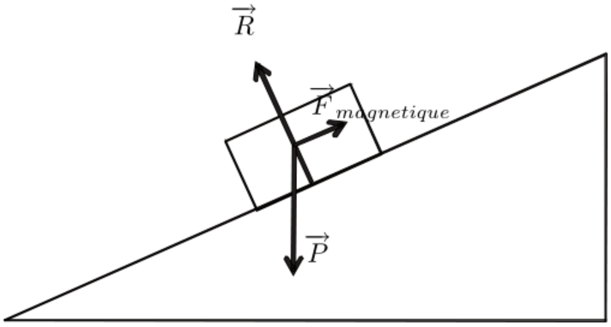
Dans le cas limite, la bille tombe au-delà du point F. Donc même si $k > k_0$, la bille tombera toujours sur la piste.

19) Puisque la bille conserve sa vitesse horizontale, $\boxed{v = -\sqrt{gR}}$ après atterrissage.

- Fin de la partie II -

III - Étude de la force de répulsion magnétique par un aimant

20) Bilan des forces : poids, réaction normale du support, répulsion magnétique.



21) Le PFD donne :

$$m\ddot{x}\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}$$

On projette selon l'axe $(\mathrm{O}x)$ et on se place à l'équilibre :

$$0 = -mg\,\sin(\alpha) + k\left(\frac{x_0}{x_{eq}}\right)^n \quad \Rightarrow \quad x_{eq} = x_0\left(\frac{k}{mg\,\sin(\alpha)}\right)^{1/n}$$

On se place dans l'approximation des petits angles :

$$\sin(\alpha) \simeq \tan(\alpha) \simeq \frac{h}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{eq} = x_0\left(\frac{kL}{mgh}\right)^{1/n}}$$

22) D'après la relation précédente,

$$\underbrace{\ln(h)}_{y} = \underbrace{\ln\left(\frac{kL}{mgh}\right)}_{b} \underbrace{-n}_{a} \underbrace{\ln\left(\frac{x_{eq}}{x_0}\right)}_{x}$$

On effectue une régression linéaire à la calculatrice $y = ax + b$. On trouve alors :

$$a = -4,06 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 4} \quad \text{et} \quad b = -13,55 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 2\times 10^{-6}\ \mathrm{N}}$$

23) Une position d'équilibre stable se traduit par un minimum d'énergie potentielle, ie. $\mathcal{E}_p'(x_{eq}) = 0$ et $\mathcal{E}_p''(x_{eq}) = K > 0$. Un développement de Taylor à l'ordre 2 (approximation harmonique) autour de x_{eq} donne donc :

$$\mathcal{E}_p(x) \simeq \mathcal{E}_p(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \times \mathcal{E}_p'(x_{eq}) + \frac{1}{2}(x - x_{eq})^2 \times \mathcal{E}_p''(x_{eq}) = cte + \frac{1}{2}K(x - x_{eq})^2$$

La force dont dérive cette énergie potentielle vaut :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_p) = -K(x - x_{eq})\,\overrightarrow{u_x} \quad \text{avec :} \quad K = \mathcal{E}_p''(x_{eq}) = -F'(x_{eq})}$$

Ici, (F est la résultante) :

$$F = -mg\,\sin(\alpha) + k\left(\frac{x_0}{x}\right)^n \quad \Rightarrow \quad F' = -nkx_0^n x^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = nkx_0^n x_{eq}^{-(n+1)}}$$

24) On rappelle l'expression de la pulsion propre d'un ressort :

$$\omega_0 = \frac{K}{m} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{mx_0}{kn}\left(\frac{kL}{mgh}\right)^{\frac{n+1}{n}}} \propto h^{-\frac{n+1}{2n}}$$

- Fin de la partie III -